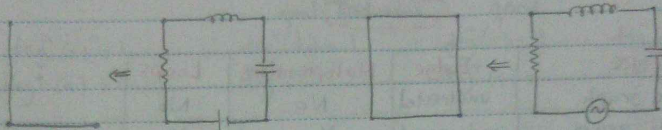
Graph-Theory

LEC. 1

← بداية هذا العلم كانت من خلال العالم Euler الذى كان يفكر فى مشكلة وجود ٧ كبارى بين جزر والمطلوب ان يمر على هذه الكبارى مرة واحدة بدون تكرار للكوبرى ومن خلال الخريطة حول المشكلة الى graph ودرس بشروط على عدد الرؤوس وشروط على عدد الاحرف

← هذا الجزء أصبح له تطبيقات هندسية كثيرة اذ امكننا تحويل الدائرة الكهربية الى graph :



← من خلال التطبيقات الهامة يمكن تحويل أى دائرة كهربية إلى graph وذلك بأن نجعل الملفات والمقاومات ومصدر التيار .... إلخ عبارة عن edges فى الـ graph وتكون الـ graph بشرط اذا كانت الدائرة صحيحة فإن الـ graph الناتج يكون connected ويحتوى على مسارات مغلقة واذا وجد قطع هندسى فى تكوين الدائرة تظهر على شكل not-connected graph

← فى بعض التطبيقات الهامة يمكن دراسة الصور الرقمية من خلال نظرية المخططات وذلك بتقسيم الصورة الى pixels وتعيين graph مناظرة عبارة عن شبكة ودراسة خواصه الرياضية على حدة

← مشكلة نقل البضائع من المصانع الى اماكن التوزيع يمكن تحويلها الى graph "مخطط" من السهل دراسة وجود أقصر مسار فيه.

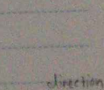
Definitions:

1) Graph $G = (V, E)$

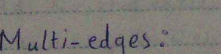
a set of vertices V and a set of edges E

2) Directive graph:

if every edge has a direction between its own nodes

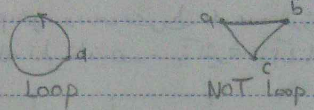


3) Multi-edges:



هو مخطط بين أى رأسين a و b يحتوى على أكثر من edge

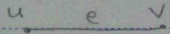
④ Psecdo graph:
a graph that doesn't contain loops:



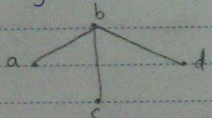
Type	Edge	Multiple-edges	Loops
Simple graph	undirected	No	No
Multi-graph	undirected	Yes	No
Psecdo graph	undirected	Yes	No ~~Yes~~
Directed graph	directed	No	yes
Directed multi-graph	directed	Yes	Yes

مفاهيم عامة

① $e = \{u, v\}$ is incident
u, v are end points



② deg(v) :



عدد الأحرف edges التي ترتبط بالنقطة v

$deg(a) = deg(c) = deg(d) = 1$

$deg(b) = 3$

← لو ظهر نقطة في الـ graph الـ degree تاعتها صفر تسمى isolated point

← لو ظهرت نقطة في الـ graph الـ degree تاعها 1 تسمى pendant vertix

③ في المخطط الذي يحافظ على الاتجاه directed graph تكون الدرجة لها نوعين

1 → Indegree ($deg^-(v)$) عدد الأحرف المتجهة التي تدخل إلى النقطة

2 → Out degree ($deg^+(v)$) عدد الأحرف المتجهة التي تخرج من النقطة

ex Find Indegree and Outdegree of all vertices of :

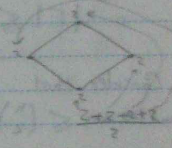
Solution

$\deg^-(a) = 1$ $\quad$ $\deg^-(b) = 1$ $\quad$ $\deg^-(c) = 1$ $\quad$ $\deg^-(d) = 0$

$\deg^+(a) = 0$ $\quad$ $\deg^+(b) = 2$ $\quad$ $\deg^+(c) = 0$ $\quad$ $\deg^+(d) = 1$

⇒ **The handshaking theorem :**

يمكن معرفة عدد الأحرف في أي مخطط من خلال معرفة درجة
كل رأس وجمع الدرجات وقسمتها على 2



$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

عدد الأحرف في المخطط

Theorem The number of vertices of odd degree in a graph is always even عدد الرؤوس ذات درجة فردية لابد أن يكون زوجي

proof

Let V_1 is the set of even degree vertices and V_2 is the set of odd degree vertices

$$2|E| = \sum \deg(v)$$
$$= \sum_{v \in V_1} \deg(v_1) + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

$$\therefore 2|E| = \text{even number} + \sum_{v \in V_2} \deg(v)$$

$$\therefore \sum_{v \in V_2} \deg(v) = 2|E| - \text{even number} = \text{even number} \#$$

Page :
Date :

ex. Show that if G is a simple graph then :

$$|E| \leqslant \binom{|V|}{2}$$

where $\binom{n}{r} = C^n_r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

Solution

using mathematical induction :

→ If $|E| = 1$

$|V| = 2$

$|E| \leqslant \binom{|V|}{2}$

الحل

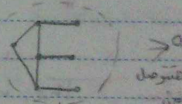
نثبت صحة العلاقة عند 1
ونفرضها عند m ونثبت صحتها
عند m+1

→ Consider that $|E| = m$; $|V| = n$

and let $m \leqslant \binom{n}{2}$ --- ①

→ we prove it's true at $|V| = n+1$

by inserting a vertix "a" in G



$|V| = n$

النقطة a متوصل
بعدد j من
الرؤوس

$|E| = m + j$

we must prove that $|m+j| \leqslant C^{n+1}_2$

$$C^{n+1}_2 = \frac{\overset{n(n+1)}{\cancel{(n+1)!}}}{2!\,\cancel{(n-1)!}} = \frac{n^2}{n} + \frac{n}{2}$$

from ① : $m \leqslant \left(\frac{n}{2}\right)$

$\therefore m \leqslant \dfrac{n^2}{2} - \dfrac{n}{2}$ --- ②

K.M.S

$$C_2^{n+1} = \underbrace{\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}}_{J} + \frac{n}{2} + \frac{n}{2}$$

From ②

$$C_2^{n+1} \geqslant m + n$$

حيث أن J دائماً رقم محصور بين 1 و n وأكبر قيمة لـ J هي عند توصيل a لجميع الرؤوس وتعطى n فيكون دائماً

$$m + j \leqslant C_2^{n+1}$$ #

ex) In round-robin tournaments there are four teams playing. A tournament where each team plays each other learn exactly once in called round-robin tournament. The directed edge represented the winner team.

Find:

- The winless and the lossless team
- Use handshake to find the total number of played games

Solution

- Indegree $= \deg^{-}(v_i)_{max} = 3$

اقل الفرق فوز هو Team 3 عشان ال Indegrees الأعلى

Outdegree $= \deg^{+}(v_i)_{max} = 3$

اقل الفرق خسارة هو Team 1 عشان ال Outdegree الأعلى

- H.S $\Rightarrow$ $\sum \deg^{-}(v) + \sum \deg^{+}(v) = 2E$

$2E = (0+2+3+1) + (3+1+0+2)$

$2E = 12$ $\qquad E = 6$

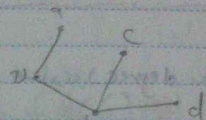
$\therefore$ No. of games = 6 games.

Neighbours:

- Definition:

Let $G = (V, E)$ be a graph. The set of neighbour of vertix v : $N(v) = \{$ all adjacent vertices with $v \}$

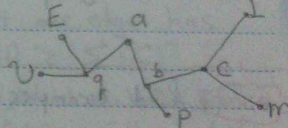
$N(v) = \{a, b\}$



$N_G(U) = \{v_i : v_i \in U \mid v_i\, e v_i \in E$ for all $v_i \in U\}$

ex Let $U = \{a, b, c\}$ find $N_G(U)$

solution



$N_G(U) = \{p, m, L, q\}$

Definition:

Let $G = (V, E)$ be a graph and $d(v)$ is a degree of vertix v

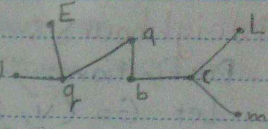
1) Minimum degree:

$\delta(G) = \min\{d(v) : v \in V\}$

2) Maximum degree:

$\Delta(G) = \max\{d(v) : v \in V\}$

{ex.} from the following graph find the max. and min. degree



solution

$\delta(G) = 1$, $\Delta(G) = 3$

ملحوظة

عشان يبقى ال graph متماثل لازم يكون ال min degree مساوى ل max. degree
مساوى لرقم معين.

[*] Definition:

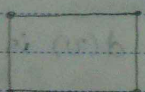
- Regular graph:

it's a graph that has $\delta(G) = \Delta(G) = K$

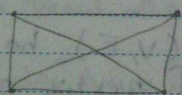
وتسمى G بـ K-regular

{ex.} find examples of 2-regular and 3-regular graphs

solution



2-regular graph



3-regular graph

[*] Definitions:

1) The average degree:

$$d|G| = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v)$$

2) The average quantities:

$$\varepsilon(G) = \frac{|E|}{|V|} = \frac{\text{عدد الاحرف}}{\text{عدد الرؤوس}}$$

ex. prove that: $\Sigma(G) = \frac{1}{2} d(G)$
where $\Sigma(G)$ is average quantities and $d(G)$ is average degrees of G

Solution

From H.S: $\quad \sum d(v) = 2|E|$

$$d|G| = \frac{1}{|V|} \sum d(v) = 2 \frac{|E|}{|V|}$$

$$d(G) = 2\Sigma(G) \qquad \therefore \Sigma(G) = \frac{1}{2} d(G) \ \#$$

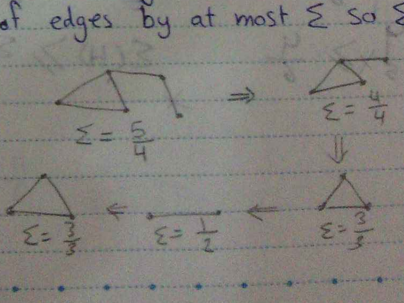
Proposition

⇒ Every graph $G=(V,E)$ with atleast one edge has a subgraph H with $\delta(H) \geq \Sigma(H) \geq \Sigma(G)$

⇐ فكرة الاثبات ان نكون ال H ~~edge~~ من ال G بحذف رأس من الرؤوس التي درجتها أقل درجة حتى نصل إلى الرؤوس الاكبر درجة ويكون درجة الرأس المحذوفة مؤثرة على قيمة Σ نقف عند هذه الخطوة ونسمى اخر خطوة وصلنا إليه بـ H فتكون هيئته محققة الصورة المطلوبة.

⇒ To construct H from G delete vertices of small degree one by one untill only vertices of large degree remain up to which degree $d(v)$ can afford to delete a vertix v without lowering vertices decrease by 1 and the number of edges by at most Σ so Σ doesn't decrease.

$$\Sigma = \frac{|E|}{|V|}$$



في الرسومات السابقة :

لوشلنا v_1 ال $\frac{4}{5}$ بقت $\frac{4}{4}$ ولوشلنا v_2 ال $\frac{4}{4}$ تبقت $\frac{3}{3}$

لوشلنا v_3 ال $\frac{3}{3}$ بقت $\frac{1}{2}$ يعني قلت نقف هنا ونرجع للخطوة اللي قبلها عند $\frac{3}{3}$.

→ Let $G = G_0, G_1, \ldots$ of induced subgraph, if G_i has $d(v) = \varepsilon(v)$

$G = G_i - V_i$

with $\varepsilon(G) \not\geq \varepsilon(G_i)$

then $H = G_i$

and $\varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$

{ex.} from the graph :

find subgraph H with $\varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$

solution

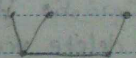
$|V(G)| = 6$, $|\varepsilon(G)| = 4$

$\frac{4}{6} = 0.667$

$\frac{4}{5} = 0.8$ ✓

$\frac{3}{4} = 0.75$

the subgraph H



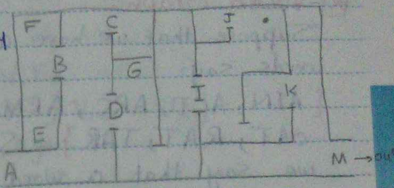
$|V(H)| = 5$

$|E(H)| = 4$

$\varepsilon(G) = \frac{4}{6}$, $\varepsilon(H) = \frac{4}{5}$

$\frac{4}{5} \geq \frac{4}{6}$ $\qquad \varepsilon(H) \geq \varepsilon(G)$

ex. A person visit a shopping center with several departments A, B, C, D, .. M as in figure ..



a) Find the graph which edges is away of moving between departments

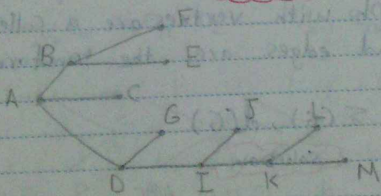
b) From the graph, find the node with max number of examining departments while moving.

c) Find the path between A and N , A and J from the graph

d) Find $\delta(G)$, $\Delta(G)$, $\varepsilon(G)$, $d(G)$

solution

a)



b) The nodes are A, B, D, I, K

c) ApM : ADIKM   A path to M

ApJ : ADIJ

d) $\delta(G) = 1$

$\Delta(G) = 3$

$\varepsilon(G) = \frac{|E|}{|V|} = \frac{11}{12}$

$d(G) = 2\varepsilon(G) = \frac{11}{6}$

Word Graph:

Suppose that we have a collection of 3-letter English words say

{ AIM, ACT, ARC, ARM, ART, CAR, CAT, OAR, OAT, RAT, TAR } = S

we say that a word W_1 can be transformed into a word W_2, if W_2 can be obtained from W_1 by performing exactly one of the following two steps:

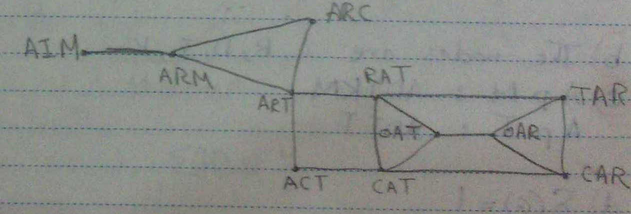
- Interchanging two letters of W_1
- Replace a letter in W_1 by another letter

Then find:

1. The word graph with vertices are a collection of words S and edges are the transformation between words
2. $\delta(G)$, $\Delta(G)$, $\Sigma(G)$, $d(G)$

Solution

1.



2. $\delta(G) = 1$

$\Delta(G) = 4$

$\Sigma(G) = \dfrac{|E|}{|V|} = \dfrac{16}{11}$

$d(G) = 2\,\Sigma(G) = \dfrac{32}{11}$

$\delta(G)=2$ Date

[*] Definition:

- Path & Cycles:

A path in a graph $P=(V,E)$

$E=\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$, $V=\{v_1, \dots v_n\}$

e_{ij} is Limited by v_i, v_j

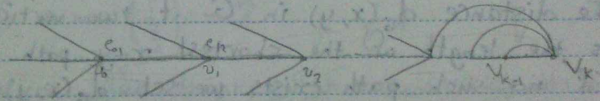
if $v_1 = v_n$ the path is cycle

طول المسار هو عدد الاحرف الموجودة داخل المسار

(*) Proposition:

every graph G can contain a path of length at least $\delta(G)+1$ provided that $\delta(G) \geq 2$

let $P = v_0 e_{01} v_1 e_{12} v_2 \dots v_{k-1} e_{(k-1)k} v_k$ is the longest path in G



if $v_i \in P$ for all $i = 0, 1, 2, \dots, k$

$\therefore$ all neighbours of v_k satisfy $k \geq d(v_i) \geq \delta(G)$ — (*)

if $i < k$ then a min path to obtain

من المعادلة (*) نستنتج أن أكبر طول لمسار في الـ G هو k وأصغر درجة في الـ G هي δ. أي

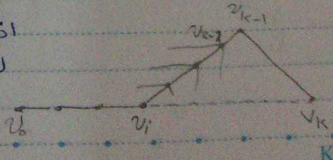
نقطة في الـ G أكيد مرتبطة بكل النقط الباقية او واحدة جزء من الـ graph أي انه اذا

وقعت نقطة v_i اختيارية بين v_0 و v_k فإنه لابد أن يوجد ما بين v_0 و v_i مسار

طوله δ وبين الـ v_i و v_k أيضاً مسار طوله δ

اذا وصلنا v_i بـ v_k هيتكون مسار مغلق

لابد من أن يكون طوله $\delta(G)+1$



K.M.S

☒ Grith - Circumference:

→ The minimum length of a cycle contained in a graph G is the grith $g(G)$ of G

→ The maximum length of a cycle in G is its circumference (محيط)

☒ Definitions:

⇒ **Chord:**

Any edge which joins two vertices of a cycle but not itself an edge of the cycle is a chord of this cycle.

⇒ $d_G(x, y)$: distance بين x, y المسافة

- The distance $d_G(x, y)$ in G of two vertices x, y is the length of the shortest x-y path in G
- If no such path exists we set $d_G(x, y) = \infty$

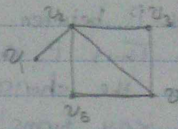
⇒ **diam G:**

- The diameter of G is the greatest distance between any two vertices in G

وذلك بأن نوجد المسافة بين كل رأسين في ال graph أي عدد الأحرف التي تربط الرأسين ونأخذ أكبر مسافة تكون هي القطر

Page
Date

ex. From the following graph:
Find the distance matrix and from it find the diameter.



Solution

Distance Matrix:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\
\hline
v_1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \\
v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
v_3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
v_4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
v_5 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0
\end{array}
\leftarrow
\qquad
\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \leftarrow
$$

matrix توضح اقصر مسافة بين كل نقطتين

اكبر قيمة فى صف

distance = δ min

$E \downarrow \quad V \quad \nabla$

$$\text{diam } G = \max \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2$$

⇐ معنى هذا التعريف اننا نحصل على اكبر مسافة لأى نقطتين x و y فى ال graph

⇐ لو فى مكان وما زلت فيه اكبر مسافة تعتبرها فحصها 1 + diam

Proposition:

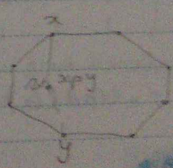
Every graph G can contain a cycle satisfies

$$g(G) \geq 2\,\text{diam}(G) + 1$$

proof

Let C be the shortest cycle in G

→ If $g(G) \leq 2\,\text{diam}\,G + 2$ then C has 2 vertices whose distance is at least $\text{diam}(G) + 1$



$V > E$

K.M.S

⇒ In G these vertices have shorter distance. Any shortest path P between them is therefore not a subgraph of C. Thus P contains a C-path xPy together with the shortest of the two x-y path in C

⇒ This xPy forms a shorter cycle than C which is contradition

⇐ نفرض العكس مع المسار المغلق C فإنه يوجد
نقطتين على الأقل لهما بعد $diam(G)+1$. هذه النقط لها بعد أقل من أقصر بعد
يولد بـ $g(G)$ (الذي هو أقصر مسار مغلق) لذلك يوجد نقطة غير واقعة على C
يمكن توصيلها مع النقطتين لتكون chord . أي أن C ليست أصغر مسار
وهنا تناقض

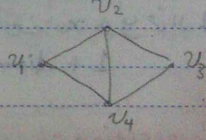
⊛ Radius :

diam → max max dist
radius → min max dist

$$Rad(G) = \min_{x \in V(G)} \left(\max_{y \in V(G)} d_G(x,y) \right)$$

اقل اكبر مسافة في المخطط "المسار" G .

ex. Find the radius of the graph



solution

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{أكبر مسافة} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$rad(G) = \min \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

Remark

⇒ Geometric Series (المتوالية الهندسية) :

$$S = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \quad \text{--- } ①$$

$$rS = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n \quad \text{--- } ②$$

$$① - ② = S - rS = a - ar^n$$

$$S = \frac{a(1-r^n)}{1-r^n}$$

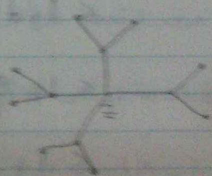
⊛ Proposition:

→ A graph G of Radius at most k and maximum degree at most d then G has no more than $1+kd^k$ vertices.

← لو كان الجراف نصف قطره k وأكبر درجة فيه d لا يزيد عدد الرؤوس في هذا الجراف عن $1+kd^k$

proof

→ Let Z be a central vertex in G and let D_i denote the set of vertices of G at a distance i from Z.



← لو فرضنا أن Z نقطة تتوسط المخطط وأن الفئة D_i هي فئة كل الرؤوس التي تبعد مسافة طولها i عن Z.

$$V(G) = \bigcup_{i=0}^{k} D_i \quad ; \quad |D_0| = 1$$

← رؤوس الجراف عبارة عن اتحادات من الفئة التي تبعد واحد مع التي تبعد 2 و 3 و ... وهكذا حتى نصل الى أكبر درجة حيث أكبر درجة هي

$$|D_i| \leq d\,|D_{i-1}|$$

⇐ لو كان كل الرؤوس الموجودة في الفئة D_{i-1} كل رأس مرتبطة برأس واحد في D_i فإنه $|D_i| = |D_{i-1}|$ ولكن هذا الشرط غير متحقق في الـ graph

⇐ وأعم حالة ممكن تحصل ان اصغر درجة في الـ D_i تكون مرتبطة بكل رؤوس D_{i-1} فلابد أن يكون

$$|D_i| \leq d\,|D_{i-1}|$$

$$|D_1| \leq d\,|D_0| \qquad , |D_1| \leq d$$

$$|D_2| \leq d\,|D_1| \qquad , |D_2| \leq d^2$$

$$|D_i| \leq d\,|D_{i-1}| \qquad , |D_i| \leq d$$

⇐ عدد رؤوس الـ G هو عبارة عن مجموع عدد رؤوس D_i

$$|G| = \sum_{i=0}^{k} |D_i|$$

$$\therefore |G| = |D_0| + |D_1| + \cdots |D_k|$$

$$\leq 1 + d + d^2 + \cdots + d^k \quad (\text{متوالية هندسية})$$

$$\leq 1 + \frac{d(d^k - 1)}{d^k - 1}$$

$$\leq 1 + \frac{d\,d^k}{d-1} - \frac{d}{d-1} \rightarrow \text{رقم سالب}$$

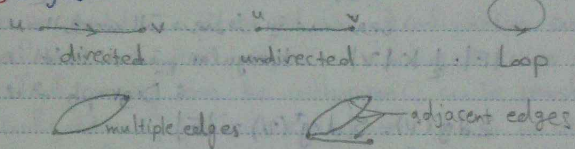
$$\leq 1 + \frac{d}{d-1}\,d^k \qquad \frac{d}{d-1} \leq k$$

$$\therefore |G| \leq 1 + k\,d^k$$

Graph $G(V,E)$:
Contains 2 sets ; set of vertices V, set of edges E

Properties of Vertices & Edges:

1. Vertices:
   - → adjacent vertices u —— v
   - → $N(v) = \{\text{all adjacent vertices to } v\}$ (neighbours)
2. Edges:



Definitions:

1. Degree of a vertix:

عدد الأحرف المرتبطة بالرأس.

2. Directed graph:

عدد الأحرف الداخلة للرأس Indegree : $deg^-(v)$ والخارجة منه Outdegree $deg^+(v)$

3. Degree Sequence:

كتابة درجات الرؤوس في ترتيب تصاعدي.

4. Minimal degree $\delta(G)$:

اقل درجة في المخطط.

5. Maximal degree $\Delta(G)$:

اكبر درجة في المخطط.

6. Average degree $d(G) = \frac{\sum deg(v)}{|V|}$

7. Average quantifies $\varepsilon(G) = \frac{|E|}{|V|}$

Page :
Date :

8. K-Regular graph:

$deg(v) = \Delta(G) = \delta(G) = d(G) = K$ مخطط جميع رؤوسه درجتها K

★ HandShacking Theorem:

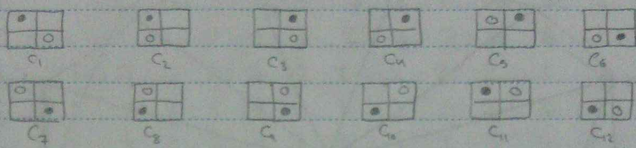
$$\sum deg(v) = 2|E|$$

from H.S theorem:

- مجموع درجات الرؤوس دائماً عدد زوجي
- عدد الرؤوس التي درجتها فردية عدد زوجي.
- في المخطط المستقيم K-regular $|E| = \frac{1}{2} K |V|$
- في الـ Digraph :

$$\sum deg^{-}(v) = \sum deg^{+}(v) = |E|$$

{ex} Suppose that we have 2 coins one silver and one gold, placed on two of the four 2*2 square checkboard:
These are twelve such configurations:



where the shaded coin is the gold coin. A configuration can be transformed into other configurations according to certain rules. Specifically we say that the configuration C_i can be transformed into a configuration C_j $(1 \leq i, j \leq 12, i \neq j)$ if C_j can be obtained from C_i by performing exactly one of the following two steps:

1) Moving one of the coins in C_i horizontally or vertically
2) Interchanging the 2 coins in C_i

Configurate this in graph with:

$V(G) = \{C_1, C_2, \text{---}, C_{12}\}$

$E(G) = \{C_iC_j : \text{if } C_i \text{ and } C_j \text{ can be transformed into each other}\}$

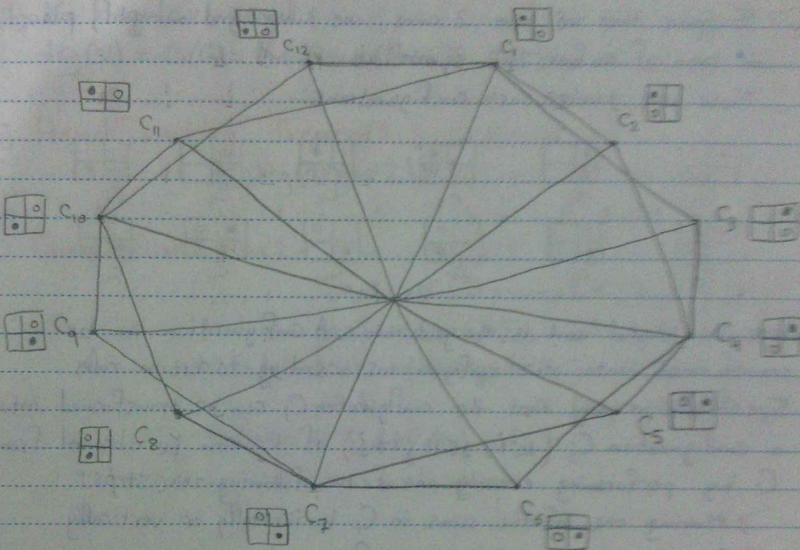
then find:

→ $N_G(C_5)$, $N_G(C_{10})$, $\Delta(G)$ and $\delta(G)$
→ Distance Matrix
→ grith $g(G)$, $diam(G)$

اذا كان لينا عملتان واحدة ذهبية والأخرى فضية وضعو فى لوحة شطرنج 2x2 لكى ينتج من حركتهم 12 حالة حيث العملة السوداء هى الذهبية وكانت عملية النقل للعملات لها قواعد لكى تتحول C_i إلى C_j وهما:

(1) تحريك أحد العملتين رأسياً أو افقياً
(2) تبديل العملتان فى ال C_i

المطلوب كما بالسؤال



لا تمكنا من تعيين مسار يمر بمعظم أو كل الرؤوس فهذا يناظر في اللعبة الحالات الممكنة لتطويل اللعبة أكبر قدر ممكن

a) $N_G(C_5) = \{C_4, C_7, C_{11}\}$

$N_G(C_{10}) = \{C_4, C_8, C_9, C_{11}, C_{12}\}$

$\Delta(G) = 5$ $\quad\quad$ $\delta(G) = 3$

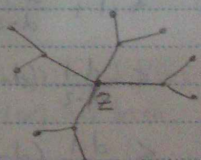
b)

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}
C_1	0	1	1	2	3	2	1	2	2	2	1	1
C_2	1	0	2	1	2	2	2	1	3	2	2	2
C_3	1	2	0	1	2	2	2	3	1	2	2	2
C_4	2	1	1	0	1	1	2	2	2	1	2	2
C_5	3	2	2	1	0	2	1	2	2	2	1	3
C_6	3	2	2	1	2	0	1	2	2	2	3	1
C_7	1	2	2	2	1	1	0	1	1	2	2	2
C_8	2	1	3	2	2	2	1	0	2	1	2	2
C_9	2	3	1	2	2	2	1	2	0	1	2	2
C_{10}	2	2	2	1	2	2	2	1	1	0	1	1
C_{11}	1	2	2	2	1	3	2	2	2	1	0	2
C_{12}	1	2	2	2	3	1	2	2	2	1	2	0

Proposition

A graph G of radius at most k and maximum degree at most $d \geq 3$ has fewer that $\frac{d}{d-2}(d-1)^k$ vertices

proof



Let Z be a central vertix in G and let G at distance i from Z

$V(G) = \bigcup_{i=1}^{k} D_i$; $D_0 = \{Z\}$; $|D_0| = 1$

حيث أن أكبر درجة في المخطط هي D يعني أن الرأس التي لها أكبر درجة يكون عدد الأحرف المرتبطة بها D وكل حرف يربطها رأس. لو كانت Z أكبر درجة تبقى مرتبطة بكام رأس ؟؟؟

for $i \geq 1$ we have $|D_{i+1}| \leq (d-1)\,|D_i|$

لأن كل رأس من ال D_{i+1} تكون بجوار رأس من ال D_i أي بعد النقطة مع ال D_i
مرة وإذا كانت كل النقط درجتها D فإن العدد الكلي يكون : $(D-1)|D_i|$ وذلك
اذا كانت جميع الرؤوس في D_i درجتها D

Because every vertix in D_{i+1} is a neighbour of a vertix in D_i and each vertix in D_i has at most $(d-1)$ neighbours in D_{i+1} Thus for

$$|D_{i+1}| \leq (d-1)\,D_i$$
$$|D_1| \leq (d-1)\,|D_0| \quad ; \quad |D_0| = 1$$
$$|D_2| \leq (d-1)\,|D_1| \leq (d-1)^2$$
$$|D_3| \leq (d-1)^3$$
$$\vdots$$

$$|G| = |V(G)| = |D_0| + |D_1| + |D_2| + \cdots + |D_k|$$
$$\leq 1 + (d-1) + (d-1)^2 + \cdots + (d-1)^k$$ متتالية هندسية

$$|G| \leq 1 + \left[\frac{(d-1)\left((d-1)^k - 1\right)}{(d-1)-1}\right]$$

$$\leq 1 + \frac{d-1}{d-2}\left[(d-1)^k - 1\right]$$

$$\leq \frac{d-1}{d-2}(d-1)^k + \frac{d-2-d+1}{d-2}$$ قيمة ثابتة

$$\leq \frac{d-1}{d-2}(d-1)^k$$

$$\leq \frac{d}{d-2}(d-1)^k$$

☒ Short path problem:

1 Pruning algorithm:

The algorithm finds the shortest path between a vertix w

1) During the algorithm each vertix v' of G is assigned two things:
   - a- A number $L(v')$ denoting the current minimal length of a path from u to v'
   - b- A path $p(v')$ from u to v' of length $L(v')$
2) Initially we set $L(u) = 0$ and $p(u) = u$
   Every other vertix v initially
   $L(v) = \infty$, $P(v) = \phi$
3) Each step of the algorithm examines an edge $e = (v', v)$ from v' to v, length k
   we calculate $L(v') + k$
4) Suppose $L(v') + K < L(v)$ then we find the shortest path from u to v
   $L(v) = l(v') + K$
   $P(v) = p(v') + v$
5) Otherwise we don't change $L(v)$ and $P(v)$
6) The algorithms ends when $P(w)$ has been determined

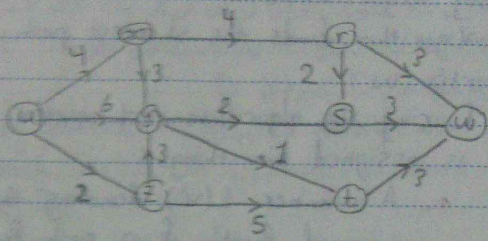
١) تكون شجرة تسمى شجرة البحث وهي تبدأ بـ start vertex وينتهي كل مسار فيها بـ end vertex

٢) نسير على الشجرة من level إلى level من اليسار لليمين.

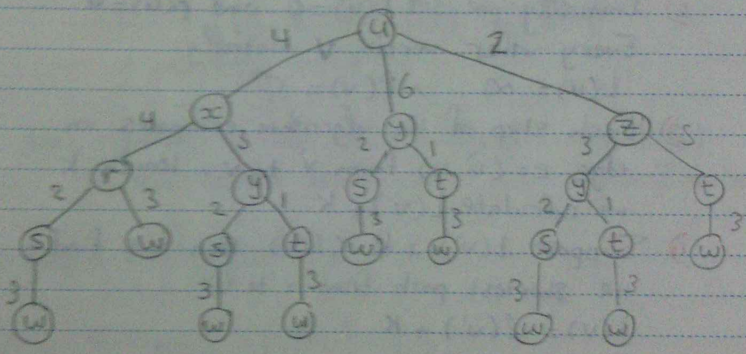
٣) عند كل رأس نحسب $L(v)$ وهي مجموع المسافات من البداية للنقطة و $P(v)$ هي المسار للنقطة

٤) إذا ظهرت في الشجرة أكثر من مسار نأخذ أصغرهم من $L(v)$ ونكمل الباقي حتى نصل إلى النقطة النهاية

Ex. Use pruning algorithm to find shortest path from u to w



Solution



⇒ From u :

$L(x) = 4$ $\qquad$ $P(x) = ux$

$L(y) = 6$ $\qquad$ $P(y) = uy$

$L(z) = 2$ $\qquad$ $P(z) = uz$

⇒ level 1:

x $L(r) = 4 + 4 = 8$

$L(y) = 3 + 4 = 7$

y $L(s) = 2 + 6 = 8$

$L(t) = 1 + 6 = 7$

z $L(y) = 3 + 2 = 5$ $P(y) = uzy$

$L(t) = 2 + 5 = 7$ $P(t) = uzt$

⇒ level 2:

r $L(s) = 2 + 4 + 4 = 10$

$L(w) = 3 + 4 + 4 = 11$

y $L(s) = 2 + 3 + 2 = 7$

$L(t) = 2 + 3 + 1 = 6$

t $L(w) = 3 + 5 + 2 = 10$

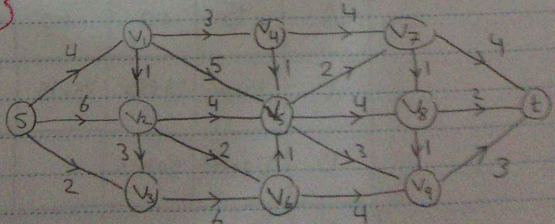
⇒ level 3:

s $L(w) = 3 + 5 + 2 = 10$

t $L(w) = 9$

∴ The shortest path is uzytw

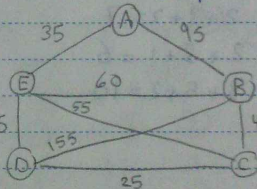
Report



(2) Dijkstra's algorithm:

1. نكون جدول الصف الأول به رموز المخطط
2. العمود الأول من الجدول أول نقطة بداية
3. نوجد المسافة بين كل النقط ونقطة البداية ونختار اصغرهم تكون هى النقطة الثانية فنضعها فى الصف الثانى فى العمود الأول
4. نكرر هذه العملية مع تعيين مجموع الـ weight المسافات من أول المخطط إلى آخره حتى نصل إلى أصغر مسار
5. الرؤوس الغير مرتبطة نضع أمامها ∞ والرؤوس المختارة لا تختار مرة أخرى لأن المسار تعريفه ان يمر على الرأس مرة واحدة والحرف مرة واحدة

ex: Find the shortest path in undirected graph between node A and C



solution

المسار هو AEDC

	B	C	D	E
A	95	∞	∞	35
E	35+60	35+55	35+15	
D	50+155	50+25		
C				

شرح

- نبدأ من A ونختار أصغر رقم مرتبط بال A فيكون هو E لأن ال weight بتاعه 35 عند عمل الجدول يكون فيه خانتين واحدة مع B وهي 95 وتانية مع E وهي 35 اصغرهم هي E
- بعد اختيار E ننظر للرؤوس المرتبطة بال E وهي B, D, C
- نحسب ال weight لها مع ال B 35+60 ومع C 35+55 ومع D 35+15 ونختار اصغرهم وهي D 50 وهكذا إلى أن نصل للمسار AEDC

Paths & cycles:

⇒ Path:

مسار من رأس الى اخرى من غير ما أمر على أي رأس أو أي حرف أكثر من مرة

⇒ Cycle:

نقطة بدايتها هي نفسها نقطة نهايتها.

⇒ Length:

طول ٢ حرف المسار.

Measures of the graph:

1. Grith (g(G)):

   طول أصغر مسار مغلق

2. Circumference:

   طول أكبر مسار مغلق

3. Chord:

   حرف يصل بين رأسين في الـ cycle ولكنه ليس من أحرف الـ cycle.

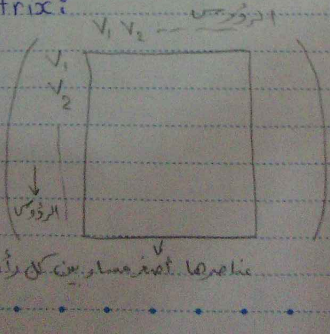
4. Diameter (diam(G)):

   أكبر أصغر مسار في المخطط.

5. Radius (Rad(G)):

   أصغر أصغر مسار في المخطط.

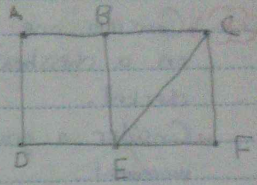
Distance matrix:



عناصرها أصغر مسار بين كل رأسين

ex. Consider the following graph:

Find:



1. All paths from A to F
2. All trails from A to F
3. d(A, F)
4. diam(G), Rad(G), g(G), Cir(G)
5. ALL cycles that include A
6. All cycles in G

Solution

1. Paths from A to F:

   ABCF - ABEF - ABECF - ADEF - ADECF - ADEBCF

2. Trails from A to F:

   All paths + ADEBCEF

trails

متعديش على حرف أكتر من مرة
لكن يسمح انا نعدي على رأس
أكتر من مرة

3. $d(A, F) = 3$

4.

أكبر رقم في كل صف

$$
\begin{array}{c|cccccc|}
 & A & B & C & D & E & F \\
\hline
A & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\
B & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\
C & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\
D & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 2 \\
E & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
F & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

$diam(G) = Max(\ ) = 3$

$Rad(G) = Min(\ ) = 2$

$g(G) = 3$, $Cir(G) = 6$

5. Cycles include A: ABEDA - ABCEDA - ABCFEDA

6. Cycles in G:

   $\boxed{5}$ + BCEB + CFEC + BCFEB

ex: → Consider one movement of the queen or the minister on a chessboard 3×3 such that the queen is not checked.

→ Consider a graph whose vertices are the state of the movement.

→ Any 2 vertices are adjacent to each other if the queen or th minister can move without checking the queen

→ Find: [1] The graph

[2] Distance ~~of the~~ Matrix

[3] $\Delta(G)$, $\delta(G)$, $\varepsilon(G)$, diam(G)

solution

Q		
		S

C_1

Q		
	S	

C_2

	Q	
S		

C_3

	Q	
		S

C_4

		Q
S		

C_5

		Q
	S	

C_6

		S
Q		

C_7

Q		
		S

C_8

S		
		Q

C_9

		Q
S		

C_{10}

	S	
Q		

C_{11}

		S
Q		

C_{12}

S		
	Q	

C_{13}

		S
	Q	

C_{14}

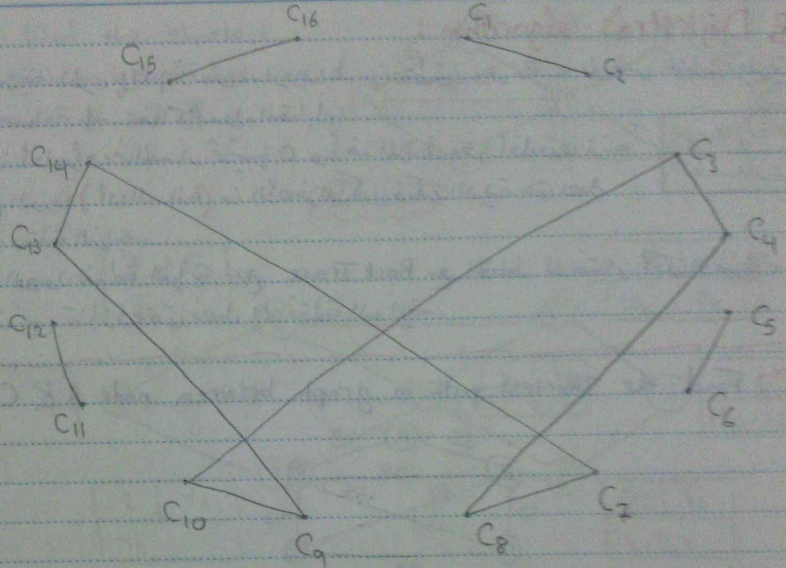
	S	
		Q

C_{15}

S		
		Q

C_{16}

1



2 distance matrix 16×16

3 → $\Delta(G) = 2$

→ $\delta(G) = 1$

→ $\varepsilon = \frac{|E|}{|V|} = \frac{12}{16}$

→ diam (G) from distance matrix

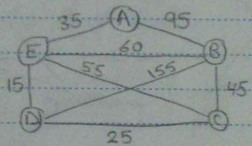
Dijkstra's algorithm :

- هي طريقة أخرى لإيجاد أقصر مسار يربط بين نقطتين وهي ترتيب رؤوس المخطط بطريقة أقل مسافة باستخدام الجدول المقابل:

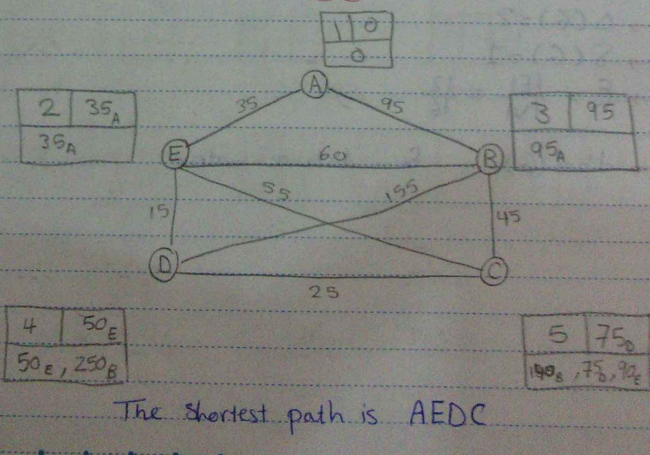
ترتيب الرأس	أقل مسافة
حسابات	

- تكون أول رأس في المسار ترتيبها 0 ونأخذ المرتبط معها بأقل وزن ترتيبه تبع الوزن (أي المسافة) من الأصغر للأكبر ونكرر العملية حتى نصل إلى نقطة النهاية.
- عند الوصول لنقطة النهاية نرجع Back Trace مع المخطط لاختيار أقل الأوزان وترتيب تنازلي حتى نصل إلى نقطة البداية.

ex. Find the shortest path in graph between node A & C.

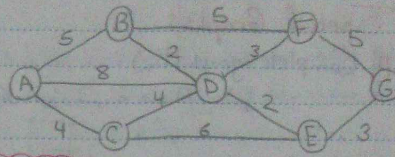


Solution

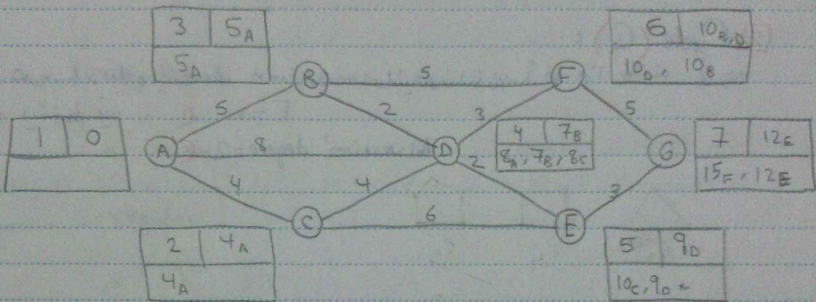


The shortest path is AEDC

ex. Find the shortest path in graph between node A and G

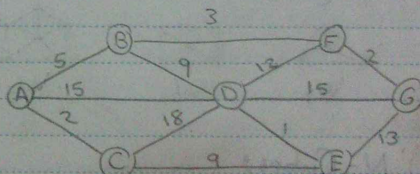


Solution

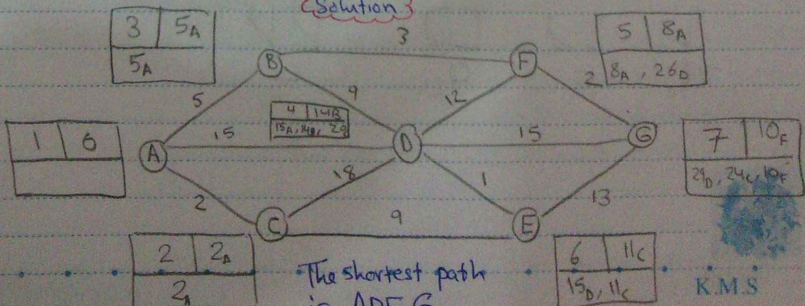


The shortest path is ABDEG

ex. Find the shortest path in the graph between node A and G



Solution

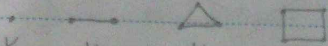


The shortest path is ABF G

[*] Special Graphs:

[1] Complete graph (K_n):

هو مخطط يحتوي على n من الرؤوس وكل الرؤوس به متصلة ببعضها.



K_1 K_2 K_3 K_4

[2] Cycle (C_n):

- هو مسار مغلق يحتوي على n من الرؤوس ولا يجوز أن يبدأ إلا إذا كانت $n \geq 3$
- يشترط فيه : ① $E = n$
  ② All vertices' degree $= 2$

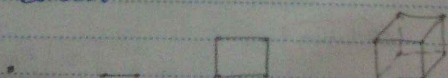
C_3 C_4 C_5

[3] Wheels (W_n):

هو مخطط به n من الرؤوس تكون مسار مغلق وبه أعلاه رأس يتصل بجميع الرؤوس

W_3 W_4 W_5

[4] N-Cubes:



Q_0 Q_1 Q_2 Q_3

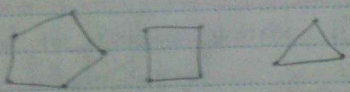
Regular Graph:

المخطط المنتظم هو مخطط درجة الرؤوس فيه كلها متساوية ويسمى المخطط r-regular
اذا كانت درجة جميع الرؤوس r

→ 0-regular:

→ 1-regular:

→ 2-regular:



→ 3-regular:

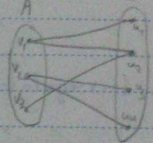
Bipartite Graph ($K_{A,B}$) :

- If the vertix set of B can be split into 2 disjionts sets A and B so that edge of G joins a vertix of A and a vertix of B than G is Bipartite Graph

$V(A) = \{v_1, v_2, v_3\}$; $V(B) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$

- هي حالة خاصة من الـ graph بحيث تقسم إلى فئتين من الرؤوس غير متقاطعتين والمطلوب إيجاد edge بين رؤوس من الـ A ورؤوس من الـ B

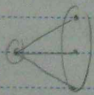
A B



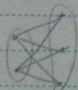
Complete Bipartite Graph :

A complete bipartite graph is a bipartite graph in which each vertix in A is joined to each vertix in B

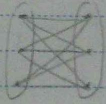
$K_{1,3}$



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



ex. If G is a bipartite graph then each cycle path of G has even length — prove.

solution

let G be a bipartite graph and $V(G) = A \cup B$; $A \cap B = \phi$

نرقم الرؤوس في الـ graph بحيث تكون الأولى في A والثانية في B والثالثة في A والرابعة في B وهكذا حتى تكون كلها معلمة

let $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow \cdots \rightarrow v_n$, $v_n = v_0$ be a path in bipartite graph

from Hand Shake

$$2|E| = \sum \deg(V(G))$$

$$= \sum \deg(V(A)) + \sum \deg(V(B))$$

In bipartite graph: $\sum deg(v(A)) = \sum deg(v(B))$

$\therefore |E| = \sum deg(v(A)) = \sum deg(v(B))$

in cycle path:

$$\underbrace{|E(C)|}_{\text{عدد الأضلاع في المسار المغلق}} = \underbrace{\sum deg(V(A(C)))}_{\text{مجموع عدد درجات الرؤوس في الـ A والواقعة على الـ C}} = \text{عدد زوجي}$$

$\therefore C$ has even length.

Incidence Matrix:

تستخدم هذه المصفوفة عندما تكون المعلومات على الاضلاع أكثر من المعلومات على الرؤوس
وتكون على الصورة $M = [m_{ij}]$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{when } e_i \text{ is incident with } v_i \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ex: Find the incidence matrix of the following graph

solution

$$M = \begin{array}{c} \\ v \\ u \\ w \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Adjacency matrix:

يستخدم هذا النوع من المصفوفات لمخطط تكون المعلومات المعطاه للرؤوس أكثر من المعلومات المعطاه للاضلاع
وترمز للمصفوفة بـ $A = [a_{ij}]$ ومع كل نوع من أنواع الـ graph لها شكل معين

1 Undirected Graph:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } e_{v_i, v_j} \in E(G) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

اذا وجد ضلع يربط v_i بـ v_j

2 Directed Graph:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \overrightarrow{e_{v_i, v_j}} \in E(G) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

v_i يتصل بـ v_j كونه متجه

Adjacent matrix of multi-graph:

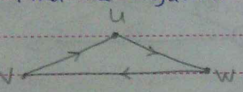
هي رسمة تتصل الرؤوس فيها بمجموعة من الأحرف (يمكن أن رأسين اثنين يتصلا بأكثر من حرف)

$$a_{ij} = \begin{cases} n & \text{number of edges from } v_i \text{ to } v_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

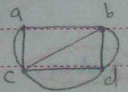
Adjacent matrix of weighted graph:

$$a_{ij} = \begin{cases} w_{ij} & w_{ij} \text{ is the weight of edges from } v_i \text{ to } v_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

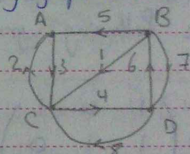
ex. Find the adjacent matrix from the following graphs:



G_1



G_2



G_3

solution

1) $A(G_1) = \begin{array}{c|ccc} & u & v & w \\ \hline u & 0 & 0 & 1 \\ v & 1 & 0 & 0 \\ w & 0 & 1 & 0 \end{array}$

2) $A(G_2) = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 2 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 2 \\ c & 2 & 1 & 0 & 2 \\ d & 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}$

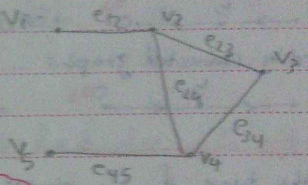
3) $A(G_3) = \begin{array}{c|cccc} & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0 & 3 & 0 \\ b & 5 & 0 & 1 & 7 \\ c & 2 & 0 & 0 & 4 \\ d & 0 & 6 & 8 & 0 \end{array}$

Path Matrix :

$P = (P_{ij})$

$$P_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if there exists a path from } v_i \text{ to } v_j \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ex. From the following graph find the path matrix



Solution

$$P = \begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Connected Graph:

يكون المخطط Connected اذا كان كل رأسين فيه يمكن ايصالهم بمسار

a) Undirected Graph: احرف بدون اتجاهات

b) Directed Graph: احرف ذات اتجاهات

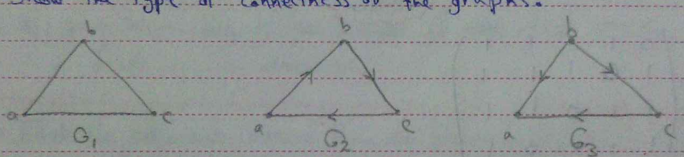
1. Strongly connected graph:

(1) $a \to b \to c$ (2) أي رأسين يمكن التوصيل بينهم بمسار محافظاً على الاتجاه

2. Weekly connected graph:

(1) $a \leftarrow b \leftarrow c$ (2) اي نقطتين يمكن التوصيل بينهم بمسار معكوس الاتجاه

ex 2) Show the type of connectness of the graphs:



Solution

G_1 is a connected graph

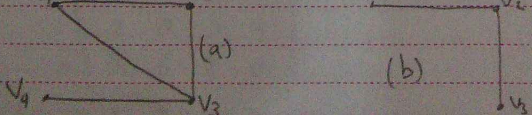
G_2 is a strongly connected graph

G_3 is neither strongly nor weekly connected graph.

Remark) The graph $G \equiv (V, E)$ is connected with n-vertices if $B = A + A^2 + \cdots + A^{n-1} = (b_{ij})$, $b_{ij} \neq 0$

لو المصفوفة B كل أرقامها غير صفرية تكون المصفوفة الأصل Connected

ex 3) Use the adjasent-matrix to show that the following graphs are connected.



Solution

a) $|V| = 4$ $\therefore B = A + A^2 + A^3$

$$A = \begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

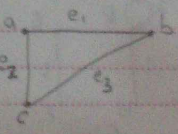
$B = A + A^2 + A^3 \neq 0$ $\therefore$ Graph is Connected

Remark

من ال adjacent matrix وهي مصفوفة التجاور X الرؤوس يمكن معرفة عدد المسارات التي لها طول 2 وترابط النقطتين A,B في ال graph أو طول 3 أو 4 وهكذا وذلك من المصفوفة A بأن نوجد $A^{(2)}$ مع كل رأس V_i و V_j تعطي عدد ال open path بين الرأسين التي طولهم 2 ومع $A^{(3)}$ عدد ال open path التي ترابط كل نقطتين طولهم 3 وهكذا

ex Consider the following graph:

Find the number of open path of length 2 from a to b and from a to c and from c to b



Solution

$$A = \begin{array}{c|ccc} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 \\ c & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

close path

$$\therefore A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

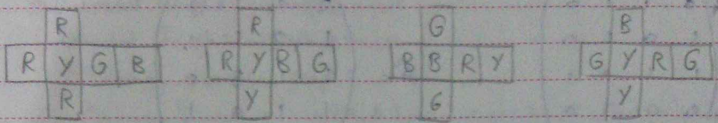
عدد المسارات التي طولها 2 وترابط a بـ c هو 1

عدد المسارات التي طولها 2 وترابط b بـ c هو 1

عدد المسارات التي طولها 2 وترابط c بـ b هو 1

Ex: "Four Cubes Problem"

Given 4 cubes whichits faces are colored red, blue, green and yellow



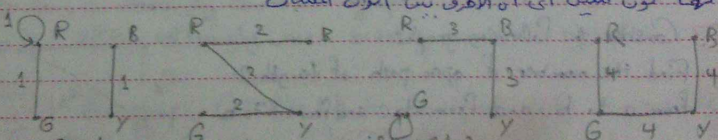
Cube 1 Cube 2 Cube 3 Cube 4

pice them up so that all four colours appear on each side of the resulting 4x1 stack then Find:

a) The graph represent this game
b) Adjacent-matrix of superimpose graph
c) Use front and back graph to find two cubes between ~~or~~ except red and yellow by case its subgraph adjacent matrix.

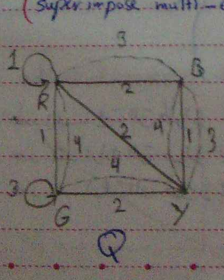
Solution

نكون مخطط بحيث أن كل رأسين في المخطط مرتبطين اذا كان كل وجهين من المكعب المتناظر لهما لون معين اي أن الاحرف بين ألوان المكعبات



Cube 1 Cube 2 Cube 3

نوجد اتحاد المخططات الاربعة (superimpose multi-edge graph)



Q

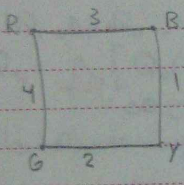
من المخطط Q نوجد مخططان جزئيان بحيث عند ال games أن نختار h_1 هي ظهور ألوان على الوجهين الامامي والخلفي و h_2 هي ظهور الوان على الوجهين الايمن والايسر بحيث تحقق الخواص التالية:

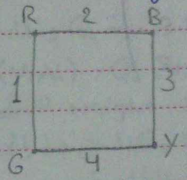
1. h_1, h_2 تحتوي على حرف واحد من كل مكعب 1, 2, 3, 4 لأن كل مكعب له وجهان أمامي وخلفي فوجهان أيمن وأيسر والخطان الجزئيان يعبران عن الألوان الأربعة.

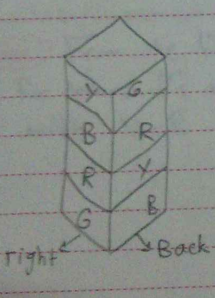
2. h_1, h_2 لا يوجد بهما أحرف مكررة

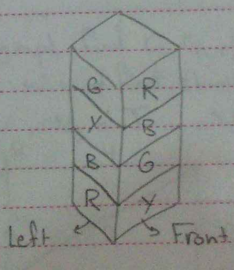
3. h_1, h_2 يكونان two-regular أي أن كل رأس درجته 2 وهذا يدل على أن كل لون يظهر مرتين فقط على أوجه المكعبات مرة على الجوانب مرة ويظهر اللون على الوجه مرتين احداهما على الأمامي والأخرى على الخلفي.

h_1 Front and back , h_2 left and right.









b) adjacent matirix $A(Q)$

$$A(Q) = \begin{array}{c} \\ R \\ B \\ Y \\ G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R & B & Y & G \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $$A(H_1) = \begin{array}{c|cccc} & R & B & Y & G \\ \hline R & 0 & 1 & 0 & 1 \\ B & 1 & 0 & 1 & 0 \\ Y & 0 & 1 & 0 & 1 \\ G & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$A^{(2)}(H_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

⊛ Warshall's Algorithm :

← الهدف من هذا ال algorithm هو تعيين مصفوفة الوزن وهي مصفوفة تحسب بين الرؤوس والرؤوس adjacent matrix وأي رقم داخل المصفوفة يمثل المسار بين النقطتين بأقل مسافة ويعتبر هذا ال algorithm تعميم للحالات السابقة.

← خطوات الحل :

① نضع مصفوفة الوزن $Q_0 = W$

② نرقم الرؤوس $V_0, V_1, V_2, \ldots, V_n$

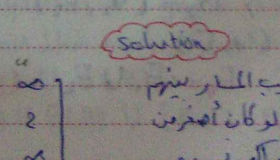
③ نبدأ بأول رأس V_0 وأول مصفوفة Q_0 وذلك لتكوين مصفوفة من Q_0 وهي Q_1

$$Q_1 = \underset{\text{الأقلية}}{\wedge}\left[Q_0(V_i, V_j), Q_0(V_i, V_0), Q_0(V_0, V_j) \right]$$

وفي تكوين Q_0 نضع ال weight الأقل والغير مرتبط نضع ∞

④ نكرر العملية مع V_1 , Q_1 وهكذا حتى نصل إلى V_n , Q_n فينتج متتابعة من المصفوفات تكون آخر مصفوفة هي المطلوبة.

ex From the following graph find Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 matrices for Warshall's algorithm to modified short-path matrix with $V_1 = R$, $V_2 = S$, $V_3 = T$, $V_4 = U$



Solution

$$Q_0 = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} R & s & t & u \end{array} \\ \begin{array}{c} R \\ s \\ t \\ u \end{array} & \begin{bmatrix} 7 & 5 & \infty & \infty \\ 7 & \infty & \infty & 2 \\ \infty & 3 & \infty & \infty \\ 4 & \infty & 1 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

من خلال R نأخذ أي نقطتين ونحسب المسار بينهم الذي يمر R وحدها ونجمع وزنه لو كان أصغر من الذي في المصفوفة نبدله ولو أكبر نسيبه وينتج ال Q الذي بعد الذي واقفين عندها Q_1

$$Q_1 = \begin{array}{c} \\ R \\ s \\ t \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R & S & t & u \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 5 & \infty & \infty \\ 7 & 12 & \infty & 2 \\ \infty & 3 & \infty & \infty \\ 4 & 9 & 1 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

Q_0 , $V_1 = R$

$$Q_2 = \begin{array}{c} \\ R \\ s \\ t \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R & S & t & u \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 5 & \infty & 7 \\ 7 & 12 & \infty & 2 \\ 10 & 3 & \infty & 5 \\ 4 & 9 & 1 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

Q_1 , $V_2 = S$

$$Q_3 = \begin{array}{c} \\ R \\ s \\ t \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R & S & t & u \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 5 & \infty & 7 \\ 7 & 12 & \infty & 2 \\ 10 & 3 & \infty & 5 \\ 4 & 4 & 1 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

Q_2 , $V_3 = t$

$$Q_4 = \begin{array}{c} \\ R \\ s \\ t \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R & S & t & u \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 5 & \infty & 7 \\ 6 & 12 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & \infty & 5 \\ 4 & 4 & 1 & \infty \end{bmatrix} \end{array}$$

Q_3 , $V_4 = u$

← لو اتبقى في المصفوفة الأخيرة ∞ نبص في ال graph ونحسب أقل مسار بالنظر

$\therefore$ The shortest path matrix

$$Q^* = \begin{array}{c} \\ R \\ s \\ t \\ u \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} R & S & t & u \end{array} \\ \begin{bmatrix} 7 & 5 & 8 & 7 \\ 6 & 12 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 6 & 5 \\ 4 & 4 & 1 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

(F) Operations on graph:

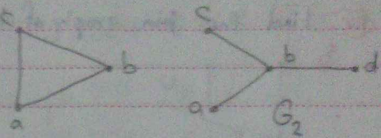
(1) The union of 2 graphs:

$G_1 \equiv (V_1, E_1)$; $G_2 \equiv (V_2, E_2)$

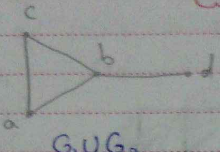
$G = G_1 \cup G_2 \equiv (V, E)$

$V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$ (بالطبع مراعاة التقاطع)

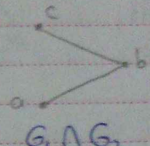
ex. Find the union and the intersection of the 2 graphs



Solution



$G_1 \cup G_2$

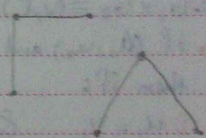


$G_1 \cap G_2$

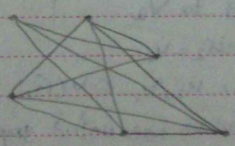
2 Edge Compliment ($\overline{G}$):

نوجد مخطط به كل الأحرف غير الموجودة في المخطط الأصلي بحيث كل النقط متوصل ببعض.

ex. Find edge compliment graph of



Solution



3 The join (suspension) of 2 graphs ($G+H$):

تعرف هذه العملية باتحاد المخططين وتوصيل كل رأس في المخطط الأول بكل رؤوس المخطط الثاني.

$V(G+H) = V(G) \cup V(H)$

$E(G+H) = E(G) \cup E(H) \cup \{e_{uv} : u \in V(G);\ v \in V(H)\}$

ex: Find the join graph of H, G:

1)

G_1 H_1

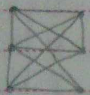
2)

G_2

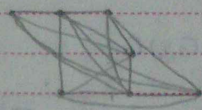
H_2

Solution

1)



2)



4) Products of graphs:

$G_1 \equiv (V_1, E_1)$; $G_2 \equiv (V_2, E_2)$

$\therefore G_1 \times G_2 \equiv (V, E)$; $V = V_1 \times V_2$, E is as follows:

→ if (u_1, u_2) and (v_1, v_2) in $G_1 \times G_2$ there is edge between them if:

1) $u_1 = v_1$ & u_2 adjacent to v_2

2) u_1 is adjacent to v_1 & $u_2 = v_2$

where $u_1, v_1 \in V(G_1)$, $u_2, v_2 \in V(G_2)$

← عند ضرب ال graph في راس وحيدة معناها اننا بنعمل copy لل graph عندها

← عند ضرب ال graph في عدد n من الرؤوس غير المتصلة معناها اننا بنعمل عدد n من ال copies

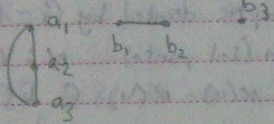
← من التعريف :

1) اذا كان الاحداثي الاول متساوي والثاني بينهم حرف نوصل حرف في الجديد.

2) اذا كانت الاحداثي الاول بينهم حرف والثاني متساوي نوصل حرف في الجديد (عكس 1)

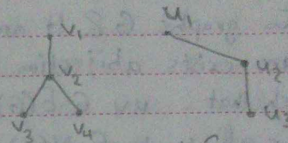
Ex Find the products of the following graphs:

1)



G_1 G_2

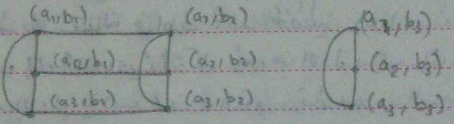
2)



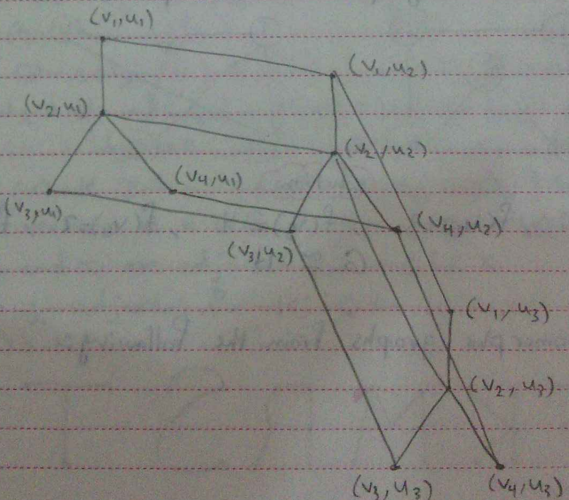
G_1 G_2

Solution

1)



2)



Isomorphism of graphs :

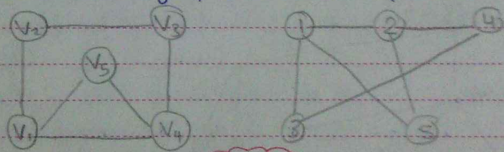
Defn

Two graphs G & H are isomorphic denoted by $G \simeq H$ if there exists a bijection function (1-1, onto) $\alpha : V_G \to V_H$ such that $uv \in E(G) \Leftrightarrow \alpha(u)\ \alpha(v) \in E(H)$ for all $u, v \in V(G)$

تشاكل المخطط :

هى خاصية طوبولوجية تدرس هل المخطط الأول يمكن الحصول عليه من المخطط الثانى دون القطع بالمط والاستطالة فى احرف أحد المخططين وهنا يحدث اذا وجد دالة تنقل من رؤوس المخطط الأول إلى الثانى بحيث أن كل رأس من الاول تذهب إلى رأس من الثانى بنفس الدرجة وكل حرف من الاول يذهب لحرف فى الثانى مرتبط بنفس الدرجة .

ex Show that the 2 graphs are isomorphic :

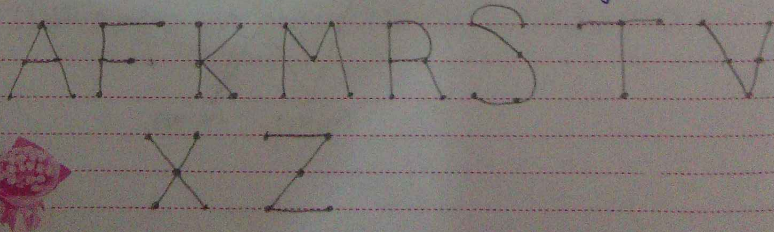


solution

$f(v_1) = 1$, $f(v_2) = 3$, $f(v_3) = 4$, $f(v_4) = 2$, $f(v_5) = 5$

$G \simeq H$

ex Find isomorphic graphs from the following :



K.M.S

Solution

$A \simeq R$, $F \simeq T$

$M \simeq S \simeq V \simeq Z \simeq W$

Theorem If G & H are isomorphic graphs then the degrees of vertices of G are the same as the degrees of the vertices of H

Proof

→ Let $G \simeq H$ ⟹ there exist $\Phi : V(G) \to V(H)$

$u \in G$, $v = \Phi(u) \in H$

$\deg(u) = \deg(v) = ??$

→ let $\deg_G(u) = 0$ (u is isolated vertix)

→ let $y \in H$; $y \neq v$ ⟹ There exists $x \in G$ such that $\Phi(x) = y$

since x and u aren't adjacent then y and v aren't adjacent in H

$\therefore \deg_H(v) = 0$

اذا كانت u درجتها 0 في G فانه لا يوجد رأس في G (x) بينها وبين u علاقة وحيث أن

المخططين متماثلين يوجد دالة تنقل الرؤوس الى رؤوس مماثلة، فانه لا يوجد رأس y

يرتبط مع صورة u وهي v لانه لا يمكن أن تكون $\deg(v) = 0$

→ let $\deg_G(u) = K \geq 1$, $N(u) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ be adjacent set of vertices to u in G , $\Phi(x_i) = y_i$ $1 \leq i \leq K$

since u and x_i are adjacent for $1 \leq i \leq K$

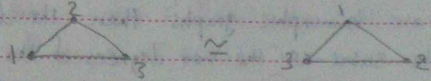
→ v and y_i adjacent for $1 \leq i \leq K$

→ $\deg_H(v) = K$

Remark

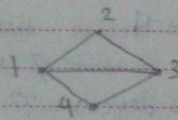
Two graphs are isomorphic if there exist a labeled of the vertices at the second graph such that they are identical.

انا تمكنا من ترقيم المخطط بطريقة مختلفة مع الحفاظ على درجات الرؤوس حصلنا على مخطط متشابه

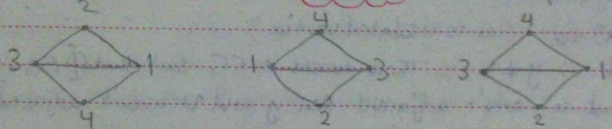


ex

Find all isomorphic graphs with



Solution



Remark

→ The number of isomorphic graphs of C_n is $2n$

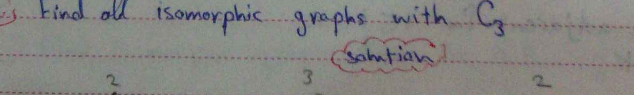
المسار المغلق له عدد من المخططات المتماثلة تساوي ضعف عدد الرؤوس

→ The number of isomorphic graphs to complete graph with n vertices are $n!$

ex

Find all isomorphic graphs with C_3

Solution



K.M.S

Graphic Sequences:

Def^n

→ A sequence of a non-negative integer is graphic if there exist a graph whose degree is precisely that sequence.

← يمكن تمثيل المخطط بمتابعة تناقصية تمثل درجات الرؤوس في المخطط، ولكى تكون هذه المتابعة قابلة للتمثيل على هيئة graph لابد أن تحقق الشروط الآتية:

1) عدد الرؤوس التى لها درجة فردية لابد أن يكون زوجى.

2) أكبر درجة لأى رأس لابد أن تكون أقل من عدد الرؤوس بواحد

3) اذا احتوى الـ graph على عدد من الرؤوس m درجتها n-1 فإن باقى الرؤوس تكون أقل درجة لها هى m-1

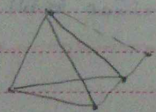
4) اذا احتوى المخطط الذى عدد رؤوسه n على رأس درجتها n-1 فإنه لا يجوز ان تحتوى على isolated point.

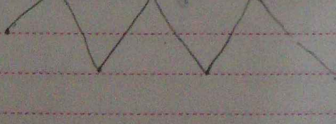
Ex. 3 Find the sequence of K_3, K_{n+1}, P_{n+1} (P, K من الدروس السابقة)

solution

K_3 

$\Rightarrow$ 2, 2, 2

K_{n+1} 
$\Rightarrow \underbrace{n, n, n, \text{—}, n}_{n+1 \text{ times}}$

P_{n+1} 
$\Rightarrow \underbrace{2, 2, 2}$, —, 1, 1

عدد الـ 2 تساوى n-1

ex. Which of the following sequences is graphical:

1) S_1: 3, 3, 2, 2, 1, 1 , $|V| = 6$

2) S_2: 6, 5, 5, 4, 3, 3, 3, 2, 2 , $|V| = 9$

3) S_3: 7, 6, 4, 4, 3, 3, 3 , $|V| = 7$

4) S_4: 3, 3, 3, 1 , $|V| = 4$

Solution

1) S_1 is a graphial sequence

2) S_2 isn't a graphial sequence

3) S_3 isn't a graphical sequence.

4) S_4 isn't a graphical sequence.

Theorem

A non-increasing sequence $S: d_1, d_2, d_3, \cdots, d_n$ $(n \geq 2)$ of non-negative integer where $d_1 \geq 1$ is graphial if and only if the sequence

$$S_1: d_2 - 1, d_3 - 1, \cdots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \cdots, d_n$$

يمكن معرفة هل المتابعة قابلة التحويل إلى مخطط من خلال:

حذف أعلى درجة من المتابعة وطرح 1 من الباقي بعدد هذه الدرجة.

لو المتابعة الناتجة حققت الـ 4 شروط تكون الأولى يمكن تحويلها إلى مخطط:

ex. Decide whether the sequence:

S: 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1 , $|V| = 10$

is graphical by using dialition degree thearem

Page:
Date:

Solution

نحذف أول عنصر من المتسلسلة s ونطرح 1 من الـ 5 التاليين.

S_1: 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1

S_2: 3, 2, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1

S_2: 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1

S_3: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1

S_4: 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1

S_4: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0

S_4 يمكن تحويلها إلى graph $\Leftarrow$ s يمكن تحويلها إلى graph

Made by:

Ibrahim Ahmed